Un caso práctico:

Medida de la densidad de una varilla metálica

- *Supongamos que se nos presenta en la práctica el problema de determinar en el Laboratorio la densidad de una varilla metálica. Y que* ***no disponemos de un aparato*** *que nos mida directamente densidades.*
- *Para hacerlo recurrimos a* ***determinar indirectamente*** *la densidad mediante la expresión:*

$$\rho = \frac{M}{V}$$

- *Donde ρ es la densidad, M la masa de la varilla y V su volumen.*

- *Comencemos por hallar el volumen de la varilla.* ***Hacemos la hipótesis de que es un cilindro.***
- *La base es aproximadamente un círculo de área:*

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4}$$

- *donde R es el radio de la base y D el diámetro.*

- ***Medida del diámetro***

- *Comenzaremos por medir n_D veces sucesivos diámetros (no siempre el mismo, para evitar que nos estemos centrando en un diámetro ligeramente deformado).*

- *Llamemos D_i a las diferentes medidas obtenidas.*

- ***Valor medio del diámetro***

- *Para hallar el valor de D comencemos por obtener su valor medio mediante:*

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n_D} D_i}{n_D} \quad \text{mm}$$

- *Con el valor medio de D podemos hallar la incertidumbre de tipo A,* $u_A(D)$ *:*

$$u_A\left(D\right)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_D}(D_i-\overline{D})^2}{n_D(n_D-1)}} \qquad \text{mm}$$

- *Para determinar la incertidumbre de tipo B, tomaremos el único dato de que disponemos, que es la resolución del palmer, sabiendo que*
- $2a_{pal} = 0,01$ mm
- *Por tanto:*

$$u_B(D) = \frac{a_{cal}}{\sqrt{3}} = \frac{0,01/2}{\sqrt{3}} = \frac{0,005}{\sqrt{3}} \text{ mm}$$

- *De esta forma* ***la incertidumbre típica de D*** *se obtiene de:*

- $$u^2(D) = u_A^2(D) + u_B^2(D) \quad \text{mm}^2$$

- **Medida de la longitud**

Mediremos con el calibre n_L veces.

El valor medio será:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n_L} L_i}{n_L} \quad \text{mm}$$

INCERTIDUMBRES

$$u_A(L) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_L}(L_i - \overline{L})^2}{n_L(n_L - 1)}}$$

- La resolución del calibre es cinco veces mayor que la del palmer: $2a_{cal} = 0,05$

$$u_B\left(L\right) = \frac{a_{cal}}{\sqrt{3}} = \frac{0,05/2}{\sqrt{3}} = \frac{0,025}{\sqrt{3}} \text{ mm}$$

- **Incertidumbre típica de la longitud:**

$$u^2(L) = u_A^2(L) + u_B^2(L)$$

- **Volumen:**

- $$\overline{V} = \overline{S} \cdot \overline{L} = \pi \frac{\overline{D}^2}{4} \cdot \overline{L} \quad \text{mm}^3$$

- **Coeficientes de sensibilidad**

$$c_D = \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{D}} = \frac{\partial \left(\frac{\pi \overline{L}}{4} \right) \overline{D}^2}{\partial \overline{D}} = \frac{\pi \overline{L}}{4} 2\overline{D} = \frac{\pi \overline{D} \cdot \overline{L}}{2} \quad \mathrm{mm}^2$$

$$c_L = \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{L}} = \frac{\partial \left(\frac{\pi \overline{D}^2}{4} \right) \overline{L}}{\partial \overline{L}} = \frac{\pi \overline{D}^2}{4} \qquad \mathrm{mm}^2$$

- **Incertidumbre típica del volumen**

$$u^2(V) = c_D^2\, u^2\left(\overline{D}\right) + c_L^2\, u^2\left(\overline{L}\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi\, \overline{D}\, \overline{L}}{2}\right)^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_D} (D_i - \overline{D})^2}{n_D(n_D - 1)} + \frac{a_{pal}^2}{3}\right] + \left(\frac{\pi\, \overline{D}^2}{4}\right)^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_L} (L_i - \overline{L})^2}{n_L(n_L - 1)} + \frac{a_{cal}^2}{3}\right]$$

INCERTIDUMBRES

- *La u(V) tiene las dimensiones de L^3 ;*

- *como la u(D) y la u(L) tienen dimensiones de L,*

- *los coeficientes de sensibilidad tienen que tener dimensiones de L^2como se comprueba en sus expresiones (D.L y D^2 respectivamente).*

- *Hemos despreciado la incertidumbre producida por el valor de π (que es un valor tabulado) puesto que* ***es conocido con un número tan grande de cifras decimales,*** *dadas en cualquier calculadora, que* ***la*** $u(\pi)$ ***puede considerarse despreciable frente a*** $u\left(D\right)$ ***y a*** $u\left(L\right)$ ***.***

- **Masa**

- **Valor medio:**

$$\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n_M} M_i}{n_M} \quad \mathrm{g}$$

- **Incertidumbre típica de tipo A de la masa**

$$u_A(M) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_M}\left(M_i - \overline{M}\right)^2}{n_M(n_M - 1)}}$$

- Resolución de la báscula:

$$2a_{bas} = 0,1\text{g}$$

$$a_{bas} = 0,05 \ \text{g}$$

Incertidumbre típica de tipo B de la masa:

$$u_B(M) = \frac{a_{bas}}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} \quad \text{g}$$

- **Incertidumbre típica de la masa:**

$$u^2(M) = u_A^2(M) + u_B^2(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n_M}\left(M_i - \overline{M}\right)^2}{n_M(n_M - 1)} + \frac{a_{bas}^2}{3}$$

- **Densidad:**

- **Valor medio:**

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{M}}{\overline{V}}$$

- Coeficiente de sensibilidad de la masa:

$$c_M = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \overline{\overline{M}}} = \frac{\partial \left(\dfrac{1}{\overline{\overline{V}}} \right) \overline{M}}{\partial \overline{\overline{M}}} = \frac{1}{\overline{\overline{V}}} = \frac{4}{\pi \overline{D}^2 \overline{L}} \quad \text{cm}^{-3}$$

- Coeficiente de sensibilidad del volumen:

$$c_V = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \overline{\overline{V}}} = \frac{\partial \left(\overline{M} \right) \dfrac{1}{\overline{\overline{V}}}}{\partial \overline{V}} = -\frac{\overline{M}}{\overline{V}^2} = -\frac{16\overline{M}}{\pi^2 \overline{D}^4 \overline{L}^2} \quad \text{g/cm}^6$$

INCERTIDUMBRES

- Incertidumbre típica de la densidad:

$$u^2(\rho) = c_M^2 u^2(M) + c_V^2 u^2(V)$$

$$u^2(\rho) = \left(\frac{4}{\pi \overline{D}^2 \overline{L}} \right)^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_M} (M_i - \overline{M})^2}{n_M (n_M - 1)} + \frac{a_{bas}^2}{3} \right) +$$

$$+ \left(\frac{16 \overline{M}}{\pi^2 \overline{D}^4 \overline{L}^2} \right)^2 \left[\left(\frac{\pi \overline{D} \overline{L}}{2} \right)^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_D} (D_i - \overline{D})^2}{n_D (n_D - 1)} + \frac{a_{pal}^2}{3} \right) + \left(\frac{\pi \overline{D}^2}{4} \right)^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_L} (L_i - \overline{L})^2}{n_L (n_L - 1)} + \frac{a_{cal}^2}{3} \right) \right]$$

INCERTIDUMBRES

- *En principio pueden arrastrarse en las operaciones numéricas todos los decimales disponibles. Si no quiere hacerse así, deben tomarse los valores medios como mínimo con una cifra decimal más que lo que den los aparatos en función de su resolución.*
- *Por ejemplo, la media de las longitudes obtenidas con el calibre debe tener como mínimo tres cifras decimales ya que las medidas leídas tienen dos cifras decimales*

- ***La incertidumbre típica se valora con dos cifras significativas, es decir, sin considerar los ceros a la izquierda.***
- *Si, por ejemplo, tenemos para* $u(\rho)$ *el valor numérico 0,0254321 se deja 0,026. Como se trata de una incertidumbre, la última cifra considerada se redondea por exceso para no disminuir el valor de u.*

- ***Los valores medios se expresan finalmente con tantas cifras decimales como hayamos dejado en su incertidumbre.***
- *Así si para el valor de* $\overline{\rho}$ *se tiene 8,20435187, como hemos dejado con tres cifras decimales* $u(\rho)$ *= 0,026* g/cm^3 *, expresaremos también* $\overline{\rho}$ *con tres cifras decimales, es decir,* $\overline{\rho}$ *= 8,204* g/cm^3*. En la expresión de la última cifra se redondea por exceso o por defecto al dígito más cercano.*

- ***Para finalmente pasar de la incertidumbre típica $u(\rho)$ a la incertidumbre expandida, $U(\rho)$ se toma un nivel de confianza N.C.= 95 %, haciendo que la constante k valga 2.***
- *Así finalmente:*

$$U(\rho) = 2u(\rho) \ \text{g/cm}^3$$

- *Y nuestro resultado de la medida será:*

$$\rho = \left[\overline{\rho} \pm U(\rho)\right] \ \text{g/cm}^3$$